Úvod do zpracování signálů

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Spojitý a diskrétní signál.
2. Spektrum signálu.
3. Vzorkovací věta.
4. Konvoluce signálů.
5. Korelace signálů.

Úvod do zpracování signálů

Karel Horák

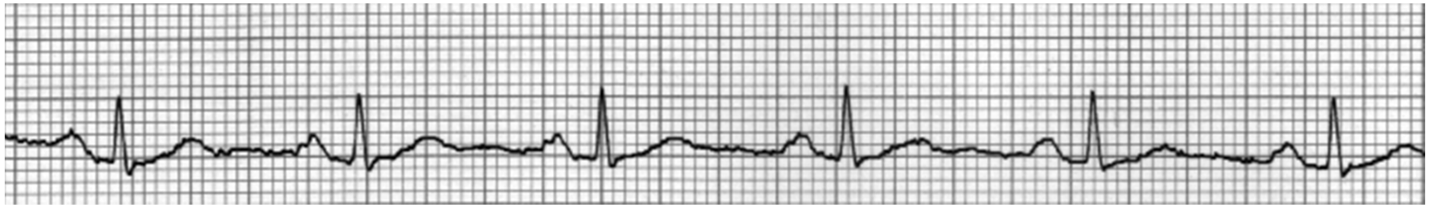
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. **Spojitý a diskrétní signál.**
2. Spektrum signálu.
3. Vzorkovací věta.
4. Konvoluce signálů.
5. Korelace signálů.

Spojitý a diskrétní signál – definice

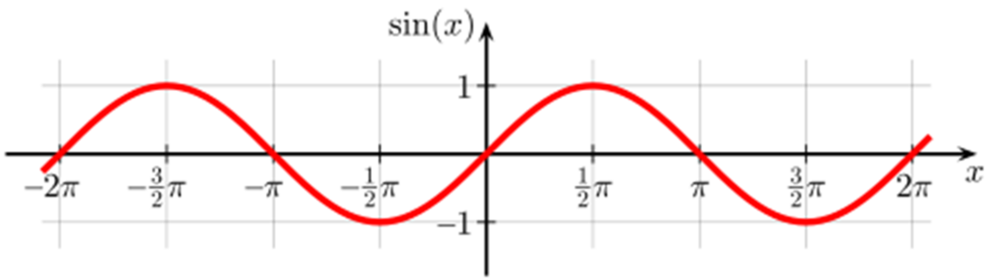
- Signál je veličina nesoucí informaci:
  - reálný signál: jde o fyzikální veličinu např. elektrické napětí
  - abstraktní signál: matematický model
- Příklad: elektrokardiogram EKG = signál elektrokardiografu spojitý v čase i amplitudě, v ideálním případě periodický:

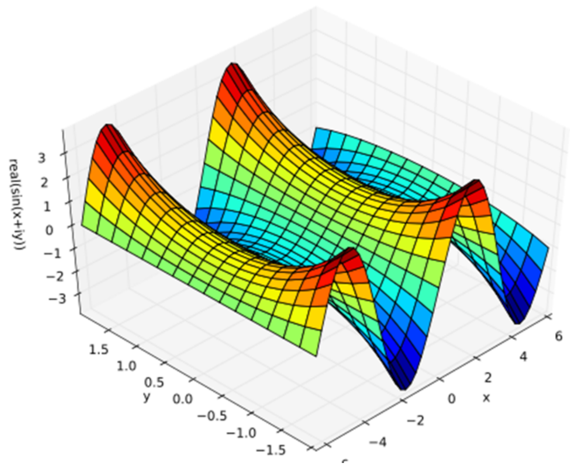


- Typy signálů:
  - deterministický signál
  - stochastický signál
- Reálné signály se špatně popisují ⇒ použití aproximujícího modelu:
  - základní požadavky modelu přesnost a složitost jdou proti sobě

Spojitý a diskrétní signál – deterministický signál

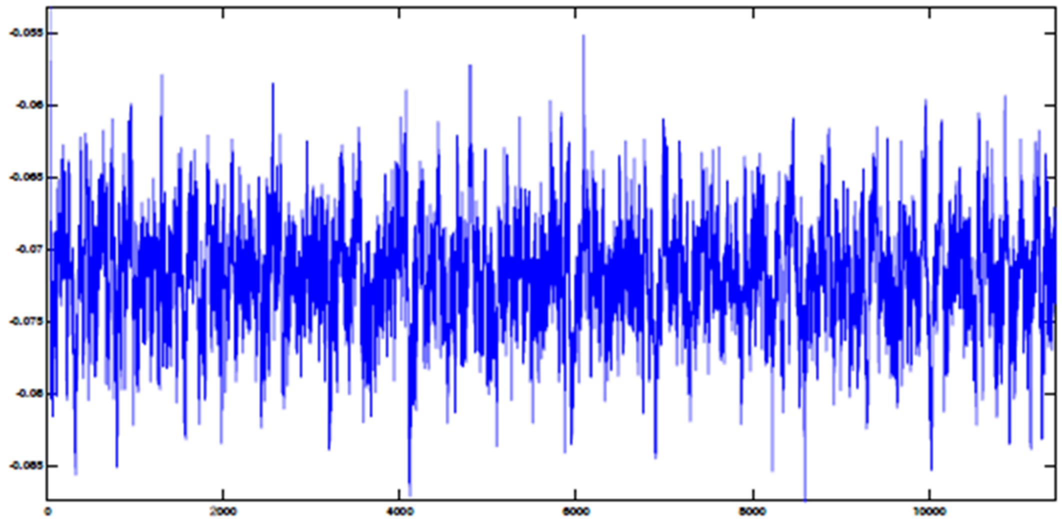
- Deterministický signál:
  - popíšeme rovnicí např. y(t) = a·sin(ω·t-φ), výjimečně tabulkou nebo grafem
  - explicitní analytické vyjádření jednou rovnicí = snazší zpracování
  - užitečný signál je zpravidla deterministický





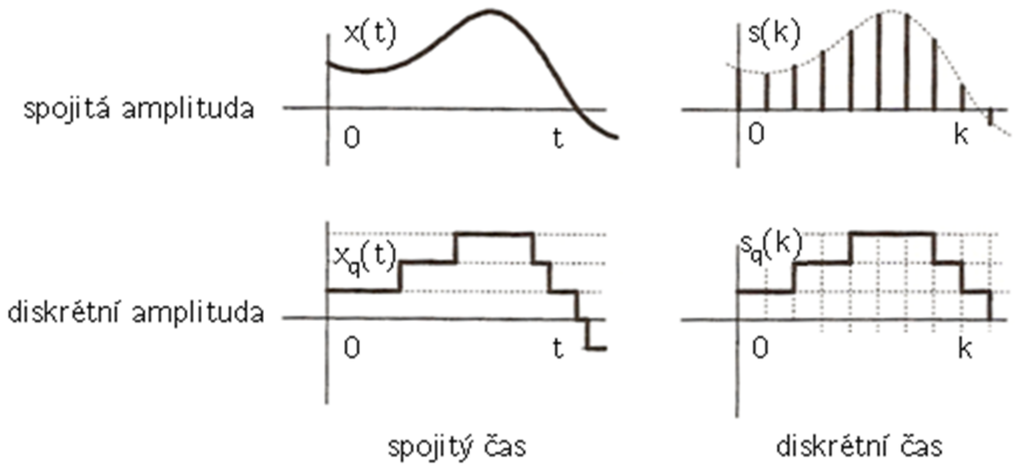
Spojitý a diskrétní signál – stochastický signál

- Stochastický signál:
  - nelze popsat rovnicí, ale sadou parametrů
  - parametry: statistické hodnoty (střední hodnota, rozptyl), rozdělení hustoty pravděpodobnosti
  - stochastický signál je zpravidla šum v užitečném signálu



Spojitý a diskrétní signál – spojitost

- Spojitý vs. diskrétní signál:
  - spojitost v čase vs. spojitost v amplitudě



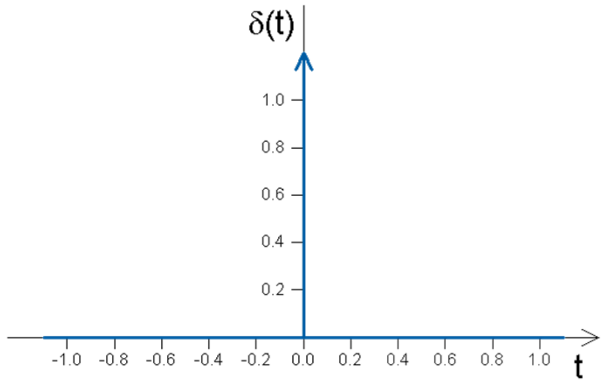
- Signál spojitý v čase i amplitudě: $x(t)$ … spojitý signál
- Signál spojitý v čase a diskrétní v amplitudě: $x_q(t)$ … kvantovaný signál
- Signál diskrétní v čase a spojitý v amplitudě: $s(k)$ … vzorkovaný signál
- Signál diskrétní v čase i amplitudě: $s_q(k)$ … diskrétní signál

Spojitý a diskrétní signál – Diracova funkce

- Diracova funkce (Diracův impuls, δ funkce) = nejjednodušší abstraktní signál.

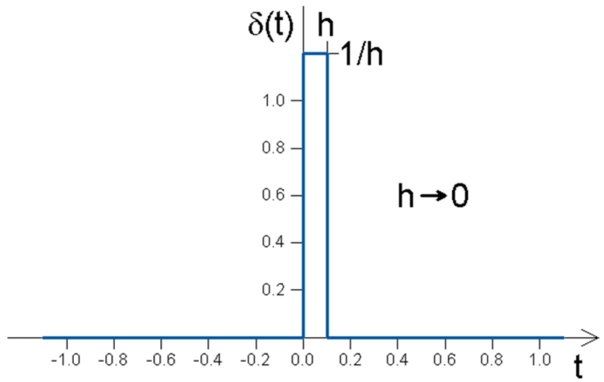
- Spojitá forma δ(t):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



- Vlastnosti:
  - – nerealizovatelný signál: nekonečná amplituda v nulovém čase
  - – signál lze modelovat impulsem o šířce h a výšce 1/h pro h → 0
  - – jednotková plocha

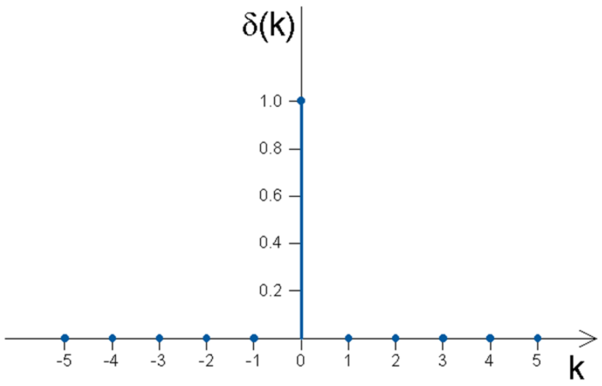
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$



Spojitý a diskrétní signál – Diracova funkce

- Diracova funkce (Diracův impuls, δ funkce) = nejjednodušší abstraktní signál.

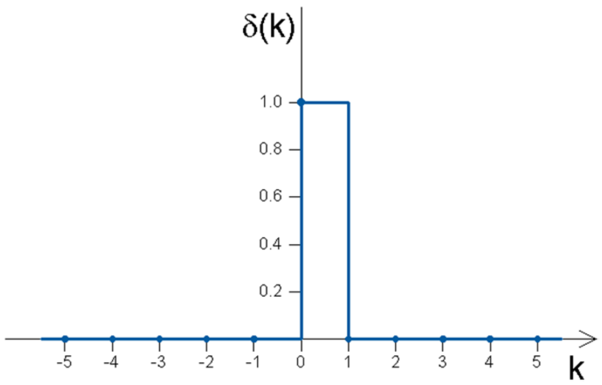
- Diskrétní forma δ(k):



$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

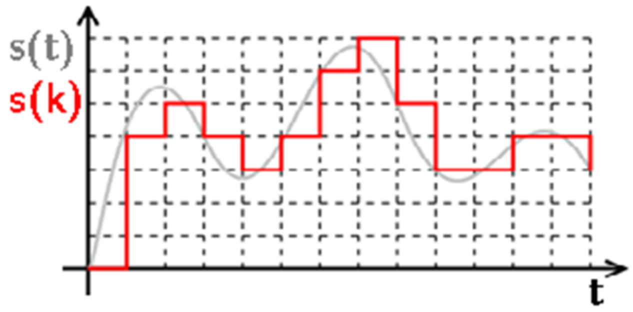
- Vlastnosti:
  - – nerealizovatelný signál: jednotková amplituda v nulovém čase
  - – model = signál pulsu po průchodu tvarovačem nultého řádu
    tj. jednotková amplituda v jedné periodě
  - – jednotková plocha

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(k) = 1$$

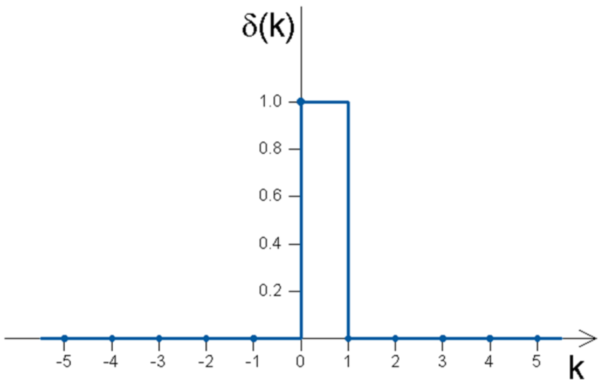


Spojitý a diskrétní signál – vlastnosti

- Libovolný diskrétní signál = konečná posloupnost posunutých a násobených Diracových impulsů:



$$s(k) = 4 \cdot \delta(k-1) + 5 \cdot \delta(k-2) + 4 \cdot \delta(k-3) + 3 \cdot \delta(k-4) + 4 \cdot \delta(k-5) + \cdots$$
$$\ldots + 6 \cdot \delta(k-6) + 7 \cdot \delta(k-7) + 5 \cdot \delta(k-8) + 3 \cdot \delta(k-9) + 3 \cdot \delta(k-10) + \cdots$$



Úvod do zpracování signálů

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Spojitý a diskrétní signál.
2. **Spektrum signálu.**
3. Vzorkovací věta.
4. Konvoluce signálů.
5. Korelace signálů.

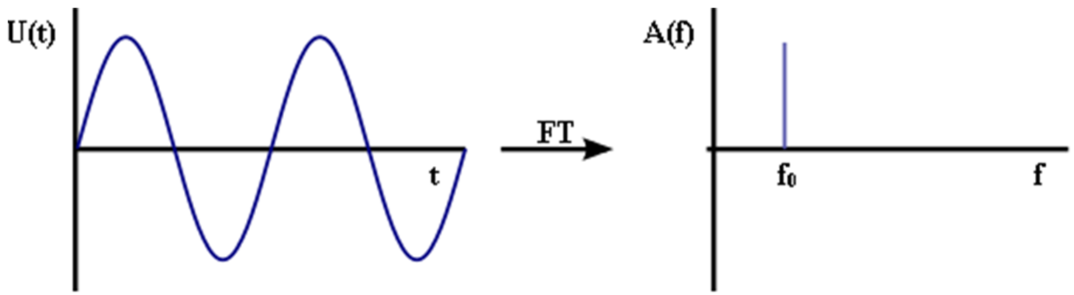
Spektrum signálu – definice

- Frekvenční spektrum signálu = reprezentace signálu řadou harmonických složek.

- Grafické vyjádření:
  – amplituda frekvenčních složek A na hodnotě frekvence f

- Jednoduchý signál U(t): $U(t) = sin(f_0 \cdot t)$
  – deterministický
  – periodický

- Spektrum signálu:
  – signál je složen pouze z jedné harmonické složky sin s frekvencí f_0
  – spektrum plně popsáno jediným parametrem f_0



Spektrum signálu – výpočet

- Výpočet spektra = převod z časově závislého signálu na frekvenčně závislý:
  - transformace s(t) $\rightarrow$ S(ω), ω=úhlová frekvence
  - přímá Fourierova transformace
  - značení: FT pro spojité signály S(ω)/s(t), DFT pro diskrétní signály S(Ω)/s(k)

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-\imath\omega t}\,dt \qquad S(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)e^{-\imath\Omega k}$$

- Rekonstrukce signálu = převod z frekvenčně závislého signálu na časově závislý:
  - transformace S(ω) $\rightarrow$ s(t)
  - zpětná Fourierova transformace
  - značení: IFT pro spojité signály s(t)/S(ω), IDFT pro diskrétní signály s(k)/S(Ω)

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{\imath\omega t}\,d\omega \qquad s(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} S(\Omega)e^{\imath\Omega k}\,d\Omega$$

- Symbolické značení Fourierovy transformace:

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)] \text{ a } s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)]$$

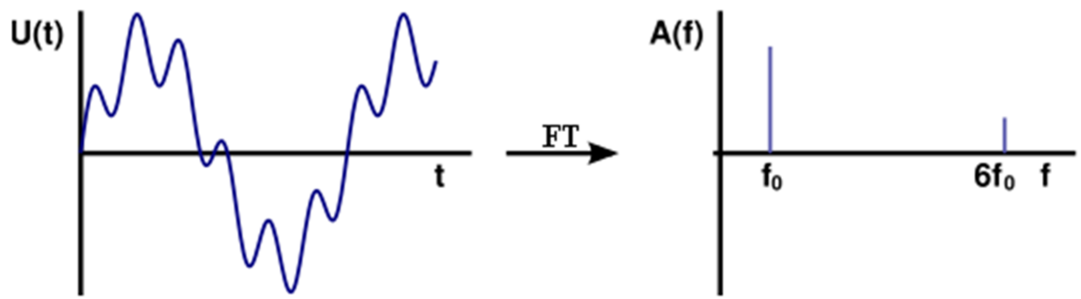
Spektrum signálu – harmonický signál

- Zobrazení spektra signálu = grafické znázornění energie signálu na dané frekvenci:

- Signál složený ze dvou harmonických složek:
  - – základní harmonická: amplituda = 1, frekvence = f_0
  - – vyšší harmonická: amplituda = $\frac{1}{4}$, frekvence = $6 \cdot f_0$

$$U(t) = sin(f_0 \cdot t) + \frac{sin(6 \cdot f_0 \cdot t)}{4}$$

- Průběh signálu U(t) a jeho spektrum A(f):

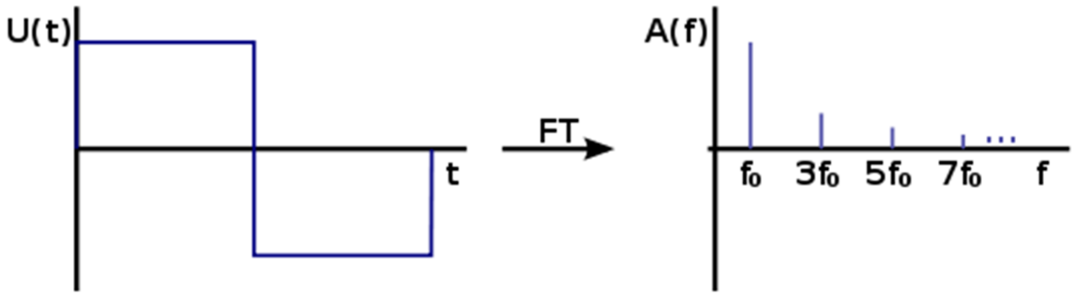


Spektrum signálu – harmonický signál

- Signál složený z nekonečného počtu harmonických složek:
  - základní harmonická: amplituda = 1, frekvence = f_0
  - vyšší harmonické: amplitudy = liché zlomky, frekvence = liché násobky f_0

$$U(t) = \frac{sin(f_0 \cdot t)}{1} + \frac{sin(3f_0 \cdot t)}{3} + \frac{sin(5f_0 \cdot t)}{5} + \frac{sin(7f_0 \cdot t)}{7} + \frac{sin(9f_0 \cdot t)}{9} + \frac{sin(11f_0 \cdot t)}{11} + \cdots$$

- Průběh signálu U(t) a jeho spektrum A(f):

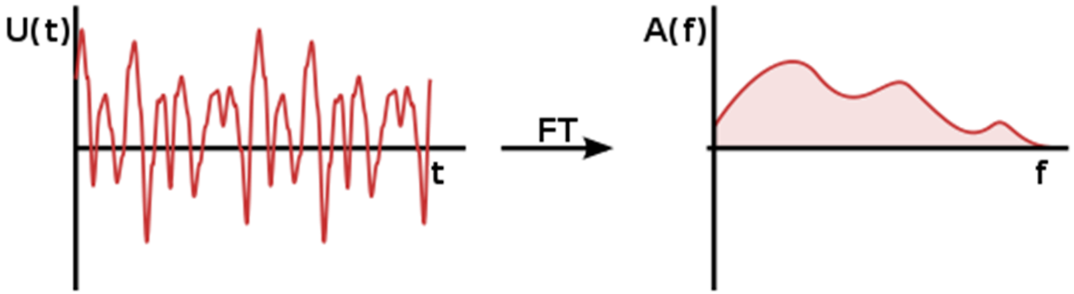


- Ideální obdélníkový signál:
  - obsahuje nekonečně rychlé změny z + do – a obráceně ⇒ nekonečně mnoho složek spektra
- Reálný obdélníkový signál:
  - obsahuje konečně rychlé změny z + do – a obráceně ⇒ konečně mnoho složek spektra

Spektrum signálu – šum

- Vlastnosti šumu:
  – není periodický $\Rightarrow$ neobsahuje harmonické složky
  – spektrum spojitého signálu šumu je spojité

- Průběh signálu šumu U(t) a jeho spektrum A(f):



- Podle tvaru spektra se rozlišuje typ šumu:
  – bílý šum: obsahuje všechny frekvence, rovnoměrná výkonová hustota spektra
  – náhodný šum: jde o nezávislý šum typu pepř a sůl
  – Gaussův šum: jde o závislý šum, rozložení podle Gaussovy funkce

Úvod do zpracování signálů

Karel Horák

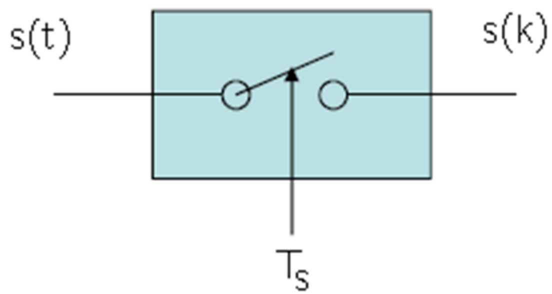
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Spojitý a diskrétní signál.
2. Spektrum signálu.
3. **Vzorkovací věta.**
4. Konvoluce signálů.
5. Korelace signálů.

Vzorkovací věta – vzorkování

- Vzorkování = převod nezávislé proměnné t spojité domény na proměnnou k diskrétní domény:
  - proces $s(t) \rightarrow s(k)$, kde $t \in R$ a $k \in Z$
  - T_S = vzorkovací perioda
  - předpokládáme časový průběh signálu, ale obecně může mít nezávisle proměnná t jiný význam

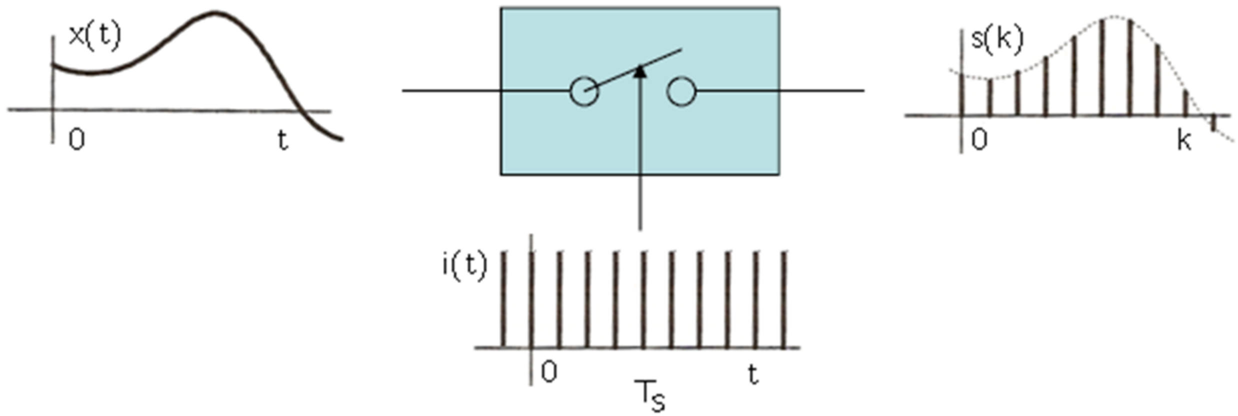


- Jak zvolit vzorkovací frekvenci f_S?

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

Vzorkovací věta – ideální vzorkování

- Ideální vzorkování:
  - – vzorkovaný signál s(k) = posloupnost vážených impulsů i(t)
  - – váha je rovna amplitudě vstupního analogového signálu v čase $k \cdot T_S$



- Vstupní analogový signál: x(t)
- Vzorkovací funkce: i(t), perioda T_S
- Vzorkovaný signál: s(k)

$$s(k) = x(t) \cdot i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot T_S) \cdot \delta(t - k \cdot T_S)$$

Vzorkovací věta – vzorkovací frekvence

- Vzorkovací frekvence f_S:
  – vzorkování = vždy dochází ke ztrátě informace
  – vhodná volba f_S = minimalizace ztráty informace

- Volba hodnoty f_S je založena na frekvenčním spektru vzorkovaného signálu s(t)

- Vzorkovací věta (Nyquist-Shanonn teorém):
  – spojitý signál x(t) může být rekonstruován z řady diskrétních vzorků s(k) pouze tehdy, pokud je vzorkovací frekvence alespoň dvojnásobná oproti maximální frekvenci ve vstupním signálu:

$$f_S \geq 2 \cdot f_{MAX}$$

- Druhy vzorkování:
  – přirozené vzorkování = periodické spínání vypínače na dobu $t_d << T_S$, mimo dobu t_d je hodnota výstupního signálu nulová
  – paměťové vzorkování = periodické impulsní vzorkování a podržení hodnoty po celou dobu intervalu T_S až do dalšího vzorku

Úvod do zpracování signálů

Karel Horák

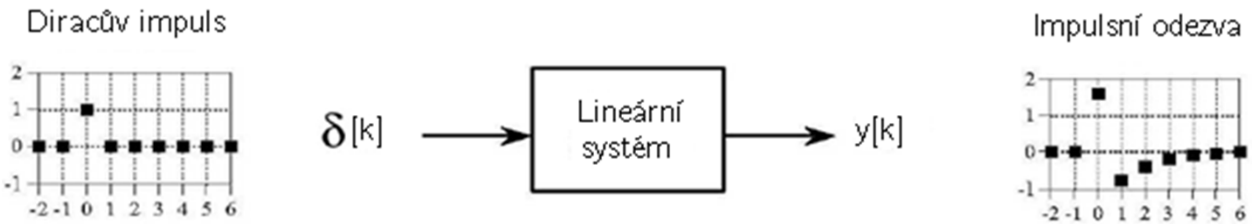
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Spojitý a diskrétní signál.
2. Spektrum signálu.
3. Vzorkovací věta.
4. **Konvoluce signálů.**
5. Korelace signálů.

Konvoluce signálů – impulsní odezva

- Impulsní odezva y[k]:
  - odezva systému na jednotkový impuls (Diracův impuls)
  - základní charakteristika systému, druhou základní charakteristikou je skoková odezva (odezva systému na jednotkový skok – Heavisideova funkce)



- Podle tvaru impulsní odezvy lze usuzovat na chování lineárního systému h[k] = identifikace.

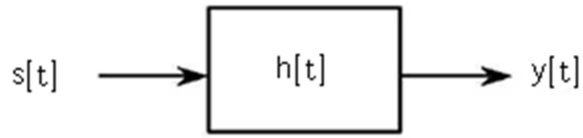
- Obrácený postup:
  - měříme vstupní signál s[k] $\rightarrow$ známe parametry
  - lineární systém h[k] je tvořen námi navrženým filtrem $\rightarrow$ známe parametry
  - chceme zjistit výstupní odezvu y[k] $\rightarrow$ výpočet pomocí konvoluce s[k] a h[k]

Konvoluce signálů – definice

- Konvoluce dvou signálů s[k] a h[k]:
  - matematická operace pro určení odezvy lineárního systému
  - operace se značí symbolem $*$:

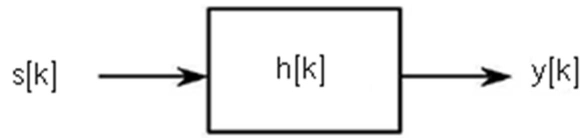
$$s[k] * h[k] = y[k]$$

- Matematická definice pro spojité signály:



$$s[t] * h[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} s[\tau] \cdot h[t-\tau] d\tau$$

- Matematická definice pro diskrétní signály:



$$s[k] * h[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s[i] \cdot h[k-i]$$

Úvod do zpracování signálů

Karel Horák

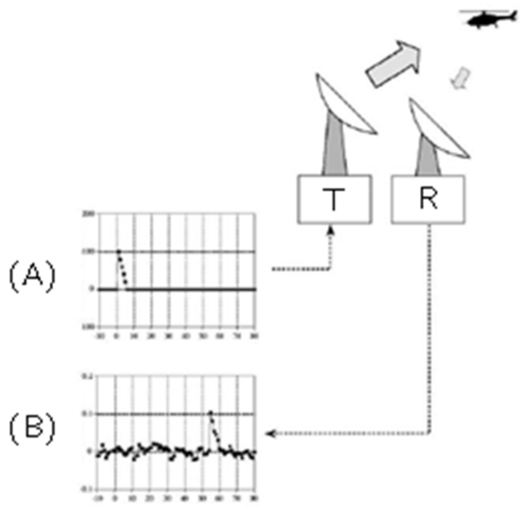
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Spojitý a diskrétní signál.
2. Spektrum signálu.
3. Vzorkovací věta.
4. Konvoluce signálů.
5. **Korelace signálů.**

Korelace signálů – úvod

- Korelace = bezměřítková shoda:
  - – vyhledává v neznámém signálu známý vzor

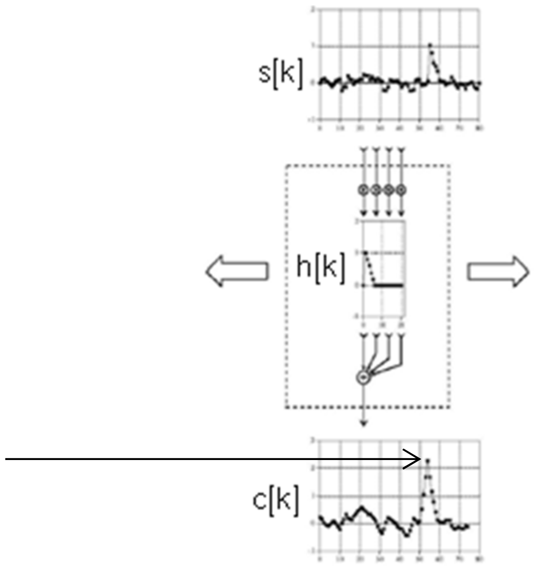


- Příklad určení vzdálenosti vrtulníku v prostoru:
  - – vysílač T odesílá známý vzor (A) do okolí
  - – synchronizovaná přijímací část radiolokátoru detekuje průběh (B) odeslaný vrtulníkem
  - – operace korelace určuje pozici vzoru v přijatém signálu ⇒ zpoždění signálu = k · vzdálenost

Korelace signálů – definice

- Pro výpočet korelace c[k] se využívá vzorce pro konvoluci:

$$c[k] = s[k] * h[-k]$$



- Vstupní neznámý signál: s[k]
- Vyhledávaný vzor: h[k]
- Korelace: c[k]

- Detekcí indexu maxima v poli c[k] lze zjistit počet period zpoždění hledaného vzoru v neznámém signálu

- Názvosloví korelace:
  – korelace mezi dvěma různými signály = vzájemná korelace (angl. cross-correlation)
  – korelace jednoho signálu se sebou samým = autokorelace (angl. auto-correlation)

- Využití autokorelace: určení periody neznámého signálu