(Vzájemná) Korelace , Cross Correlation [wikipedia.org]

Korelace určuje podobnost tvaru dvou signálů. Pokud jsou veličiny korelované, závisejí na sobě -> jsou si podobné. Její výpočet se provádí skalárním součinem (tj. násobí se příslušné vzorky signálu a násobky se sečtou). Proto se hovoří i o "sliding dot product".

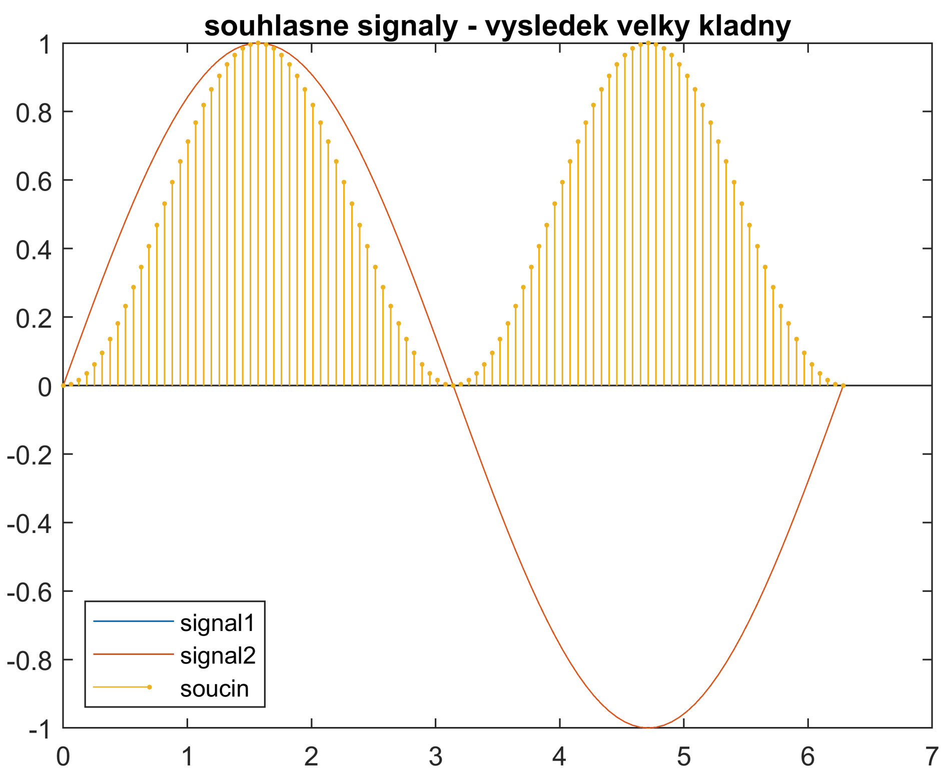
Pozn.: I když je problematika složitější, dá se uvedené vyjádřit jako "tvarově podobnější signály budou mít větší skalární součin a tedy i korelaci". Podobně se získávají koeficienty u Fourierovy transformace (matematicky je to ovšem složitější, (omezující) podmínky ...).

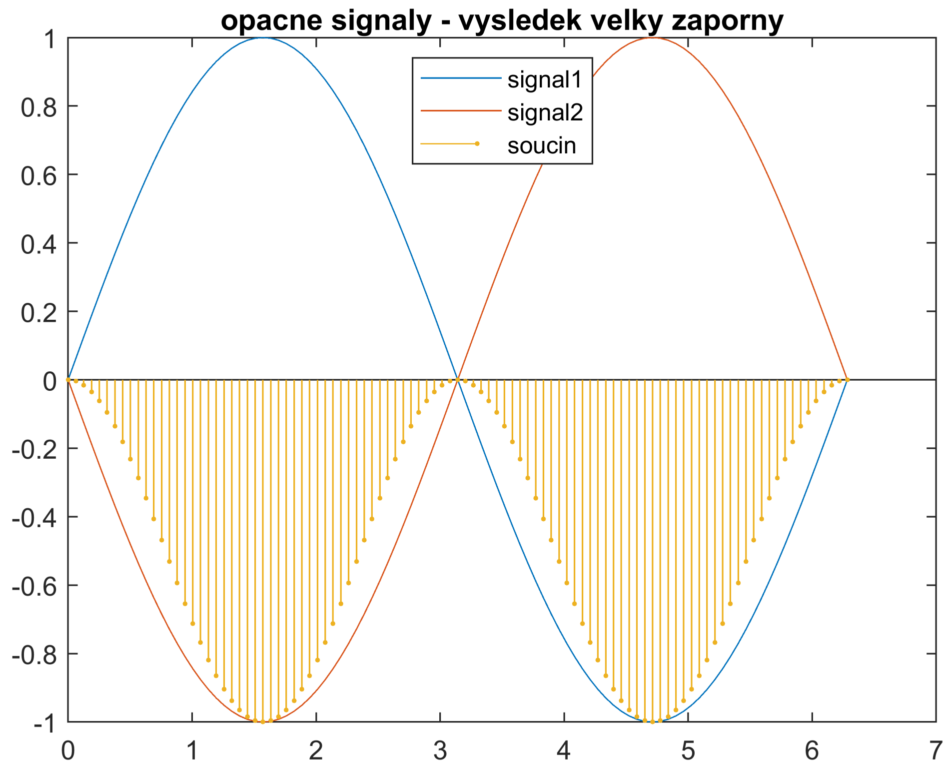
Díky uvedeným vlastnostem se korelace využívá pro zpracování signálu - získaný signál se skalárně násobí hledaným signálem (filtr, konvoluční jádro ...) a čím je větší odezva, tím je větší pravděpodobnost, že v signálu je hledaný tvar (např. hrana). Svým způsobem se jedná o srovnávání se vzorem.

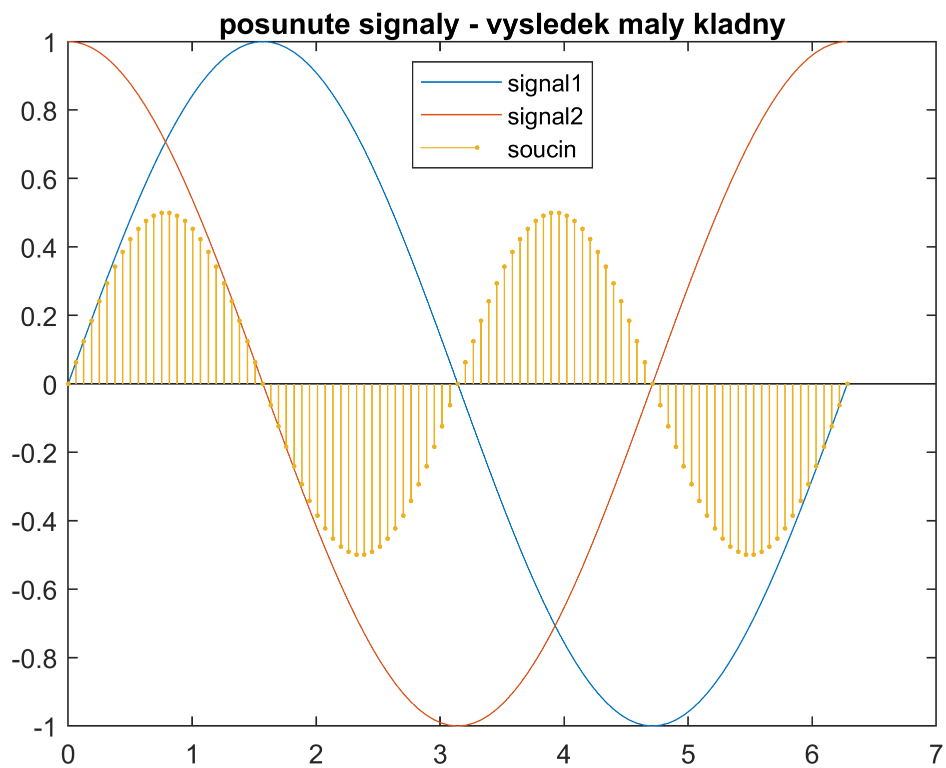
Hodnota v bodě (času/vzorku) *n* se určí násobkem signálu *g* v tomto bodě a okolí, které je určeno filtrem *f*.

$$(f * g)[n] = \sum_{m} f[m]\, g[n+m] \qquad (1)$$

Následuje ukázka pro sinusový průběh posouvajícího se signálu (červený) a vzoru (modrý). (Korelaci odpovídá) Plocha daná jejich násobky v daných časech (oranžové úsečky od časové osy) je úměrná jejich podobnosti. "Znaménko" plochy určuje zda jsou orientovány souhlasně, nebo inverzně. (funkce sin je použita pro ukázku pro její známost a jednoduchost. Místo *signal2* je možné uvažovat *filtr*)




opacne signaly - vysledek velky zaporny
signal1
signal2
soucin
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7


posunute signaly - vysledek maly kladny
signal1
signal2
soucin
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Korelace, kovariance

Korelace tedy určuje vztah (míru podobnosti) mezi dvěma signály (veličinami). Jsou-li dva signály/veličiny korelovány, znamená to, že jsou si podobné (podmínky viz matematika).

Výše uvedený vzorec (1) pro korelaci, jak je využívaný ve zpracování signálu, je velice jednoduchý (pro omezený signál a známý tvar filtru je postačující). Pro statistické veličiny je udáván korelační koeficient, který udává míru shody veličin precizněji - používá normalizaci veličin pro (výpočty pouze pro) střídavou složku a normalizaci na její velikost (tj. pro podobnost nerozhoduje superpozice na stejnosměrný signál ani násobení konstantou). Výsledek použití korelačního koeficientu nabývá hodnoty 1, pokud jsou signály úměrné, nabývá-li hodnoty -1 jsou nepřímo úměrné. (např. dvě rostoucí posloupnosti a posloupnost klesající a rostoucí).

Velikost korelačního koeficientu se stanoví pomocí vzorce:

$$\rho_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E((X-\mu_x)(Y-\mu_y))}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}} \qquad (2)$$

V čitateli je tzv. kovariance, kdy dochází pouze k odstranění stejnosměrné složky signálů. (Zjednodušeně se dá říci, že určuje lineární závislost signálů (kladné=souhlasné (např. oba rostoucí), záproné=inverzní, malé = nezávislé) - neplatí pro náhodné signály).

Hodnoty ve jmenovateli slouží pro normalizaci na velikost signálů.

Korelační vzorec pro zpracování dvourozměrného signálu při zpracování obrazu vychází z výše uvedeného (a je podobný konvolutornímu jak uvidíme později) - korelace neprovádí normalizaci a není centrovaná. Výsledek udává míru shody mezi vstupním signálem a korelačním jádrem (filtrem).

$$y(u,v) = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-m}^{m} f(u+i, v+j)\, h(i,j)$$

Například výsledek dvou sinusových signálů z nichž jeden se bude posouvat bude dávat hodnoty od -1 do 1 podle vzájemného posunu.

Jelikož je tvar filtru konstantní, není nutné používat výrazy ve jmenovateli. Jelikož filtr volíme, snažíme se, aby měl nulovou střední hodnotu. Velikost odezvy potom záleží na podobnosti signálu s tvarem filtru a na velikosti signálu, což může být užitečná informace.

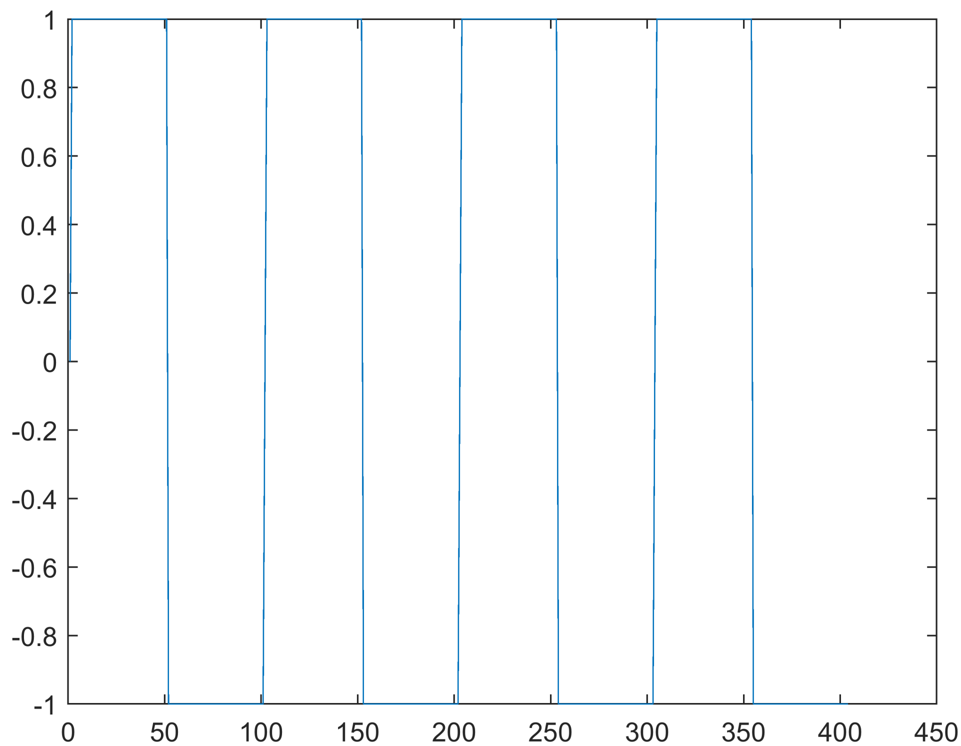
Indexace vzorků

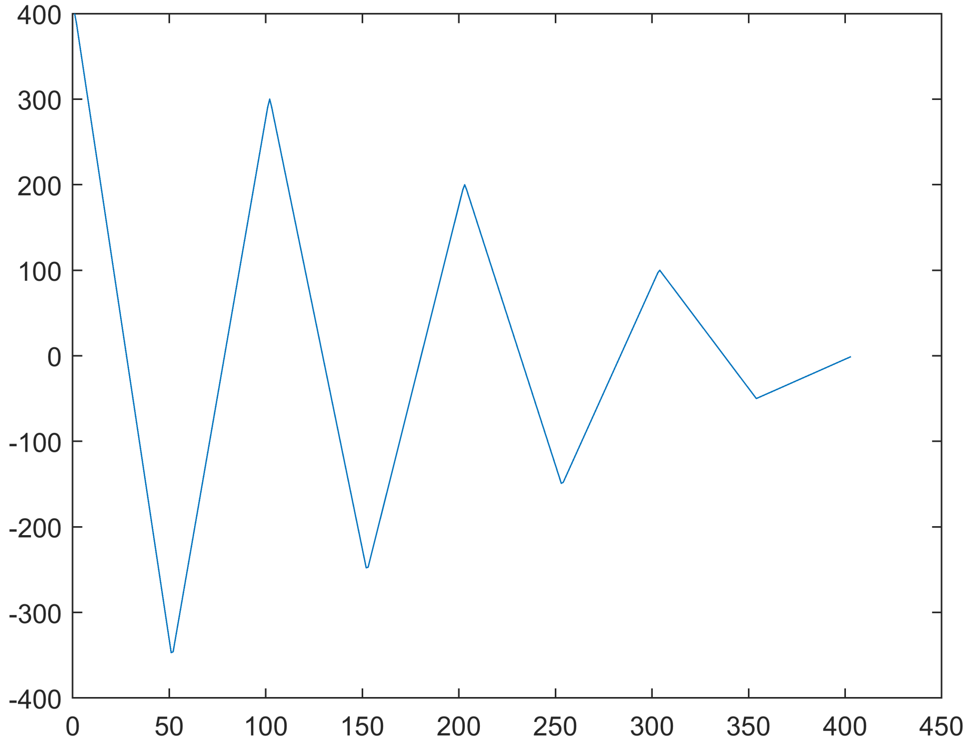
Výsledek filtru se vztahuje k určité pozici filtru. Je-li napříkllad filtr tvaru 1,1, -1,-1, je výsledná pozice mezi druhým a třetím vzorkem - výsledek je ovšem nutné uložit do pole indexovaného celými čísly, a proto dochází (minimálně) k posunu výsledku o polovinu periody. Lepší je tedy lichý počet vzorků 1,1,0,-1,-1, kde se výsledek vztahuje ke střednímu indexu.

Při zpracování časových signálů je nevýhodou to, že musíme počkat až na poslední hodnotu (tj. má-li filtr délku 5 jako ve výše uvedeném příkladu, je potřebné počkaž na všech pět vzorků - výsledek tedy dostáváme s posledním vzorkem, ale vztahuje se k pozici o dvě periody dříve). U zpracování 2D obrazu tato nevýhoda odpadá, protože máme celý signál k dispozici a může tedy pracovat s celým okolím bodu pro nějž počítáme výsledek (tedy i s body, které by u časového průběhu byly "v budoucnosti").

Autokorelace

Zjištění periodických "podobností" pro jeden signál. Signál se koreluje sám se sebou (pro různé posuny). Výsledek udává míry shody pro různá posunutí.





Konvoluce (stručný úvod)

Korelační vzorec využívaný pro zpracování obrazu je podobný vzorci používanému v teorii signálů pro konvoluci. Stejně jako u korelace je při zpracování pomocí konvoluce výsledek získaný pomocí aplikace konvolučního jádra na vstupní signál/obraz. Konvoluční jádro je při zpracování obrazu realizováno filtrem aplikovaným na obraz. Rozdíl je v tom, že používané konvoluční jádro je "otočené". U korelace probíhá signál i filtr ve stejném směru (podle toku "času"). U konvoluce můžeme vycházet z úvahy, že pro současný bod počítáme hodnotu odezvy z hodnot signálu v minulosti. S tím, že nedávné/poslední hodnoty vstupu se uplatňují krátkou dobu a tedy na ně aplikujeme hodnoty z počátku časové (impulzové) odezvy, dřívější časové hodnoty (dále od současnosti) jsou ovlivnňovány hodnotou časové odezvy s vyšší hodnotou času - z tohoto důvodu je konvolutorní filtr "otočený" (oproti impulzové odezvě).

$$y(u,v) = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-m}^{m} f(u+i, v+j)\, h(i,j) \qquad \text{korelace}$$

$$y(u,v) = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-m}^{m} f(u-i, v-j)\, h(i,j) = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-m}^{m} f(u+i, v+j)\, h(-i,-j) \qquad \text{konvoluce}$$

Konvoluce v teorii signálu

Konvoluce je základní mechanizmus při práci se signály a systémy. Říká, jak je (vstupní) signál modifikován systémem. Konvolucí nazýváme proces výpočtu i/nebo výsledek.

Předpokládáme lineární systém.

Mechanizmem konvoluce se vytváří odezva na vstupní signál.

Přijde-li na vstup systému signál, na výstupu se objeví odezva odpovídající reakci systému na daný signál.

Pro následující demonstraci ukázky konvoluce (signál+systém->signál) použijeme systém druhého řádu s dvojnásobnou časovou konstantou. Vstup pro jednoduchost omezíme na jednotkové pulzy.

Základní (impulsovou) odezvu si můžeme představit jako reakci systému na jednotkový impuls (v čase nula). Vstup je puls (realizující vynucený pohyb soustavy), v následujícím čase už se jedná o reakci soustavy na vstupní signál (tj. vlastní pohyb soustavy).

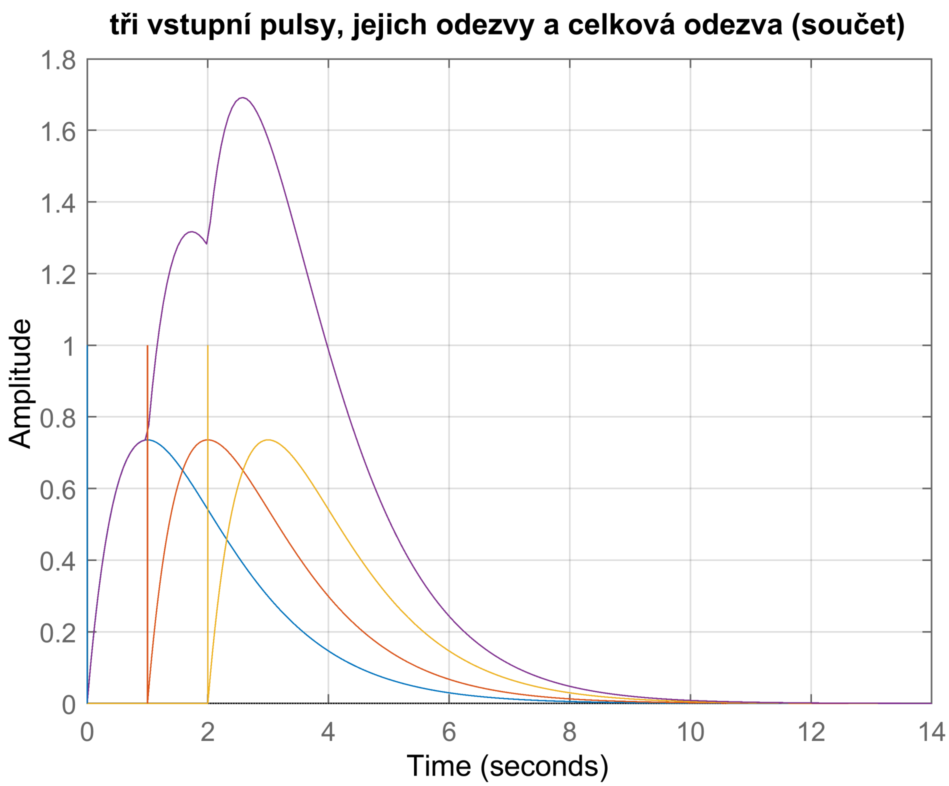
Vstupem může být například průchod umpulsu tepla tělesem - maximum se objeví po určité době (průchod) a následně se vrátí (ochladí okolím) k původní hodnotě.

```
F1_0 =

        2
  -------------
  s^2 + 2 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

Předpokládejme, že na vstup přijdou tři pulsy s časovým zpožděním. Každý vyvolá v soustavě odezvu. Soustava má vlastní vývoj závislý na minulých vstupech, nový vstup způsobí novou reakci, která se přidá ke stávajícímu vývoji soustavy (připomínám lineární chování) a výsledkem je vlastní pohyb, který je reakcí na všechny předchozí vstupy.

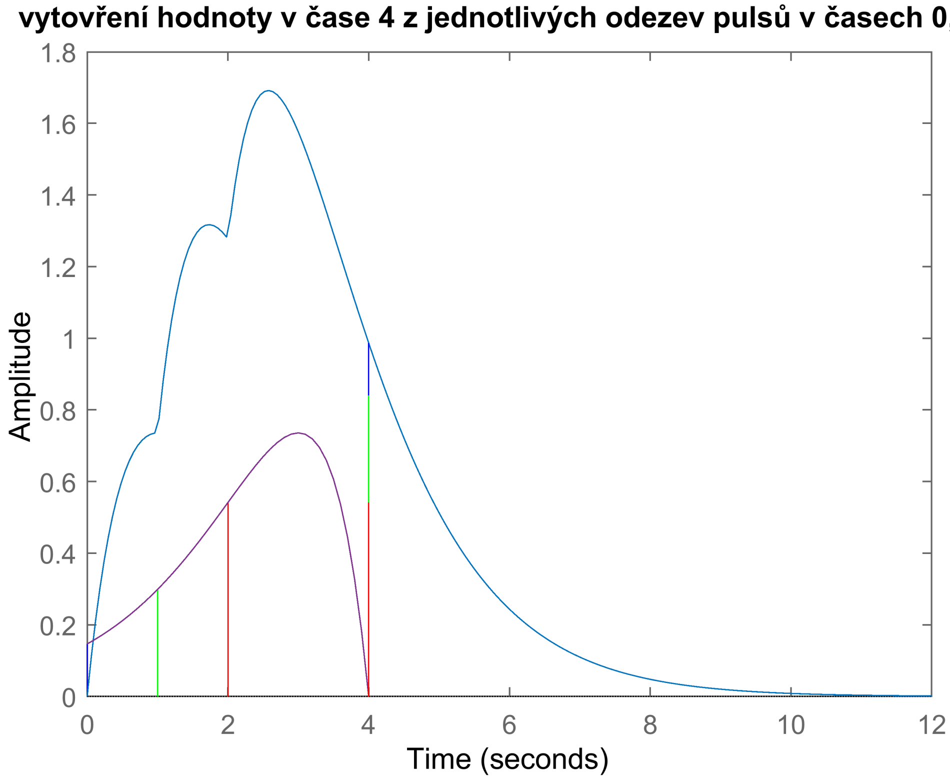


Na řešení průběhu se můžeme podívat i "z druhé strany". Tj. zeptat se jaký je výstup v daném okamžiku. Odpovědí je, že výstup v daném okamžiku je součet odezev od všech minulých vstupů po čase, který uplynul mezi působením vstupu a daným okamžikem.

Zajímá-li nás (pro výše uvedený příklad) výsledek v čase 4s, jedná se o příspěvek impulsu z času nula po čase 4s, příspěvek impulsu v čase 1 po třech sekundách a impulsu v čase 2 po čase 2 sekundy.

K výsledku dojdeme tak, že si můžeme představit situaci, že v čase 4 položíme zpětně impulsovou charakteristiku. Tím získáme informaci o tom, jakou vahou se impuls, který přišel v daném čase násobí.

V následujícím obrázku vidíme v čase 4s příspěvky od pulsů z časů 0,1 a 2s, které dávají hodnotu celkové odezvy v daném čase. Velikost je dána opačně položenou impulzní charakteristikou.



Pozn.: Výše uvedený princip si můžeme představit i pomocí následujícího případu. Stojíme na konci ulice v níž svítí pouliční osvětlení (zdroje). Jas v místě ve kterém stojíme je roven součtu příspěvků osvětlení jednotlivých zdrojů (světlo klesá s kvadrátem vzdálenosti). Podíváme-li se na zdroje z našeho místa, uvidíme, že jejich jas se (s kvadrátem) vzdáleností snižuje. Pro zjištění jasu v daném místě jsou tedy možné dva přístupy - vyslat světlo ze zdrojů a výsledek v daném místě sečíst, nebo v daném místě zjistit jak jasné se jeví jednotlivé zdroje a jejich příspěvky sečíst.

Matematický výpočet pro zjištění výstupní hodnoty dané konvolucí se nazývá konvoluční (konvolutorní) integrál.

$$y(T) = (u * g)(T) = \int_0^T u(T-t).\, g(t)\,\mathrm{d}t \; = \int_0^T u(t).\, g(T-t)\,\mathrm{d}t$$

g(t) se nazývá konvolučním jádrem.

Nebo-li : výstupní hodnota y v čase T se zjistí jako součet (integrál) jednotlivých příspěvků vstupů u, které se vyvíjely v čase podle předpisu daném impulsní charakteristikou g(t) - doba působení odezvy vstupu u(T-t) z času T-t je t proto se použije hodnota g(t).

První integrál říká, že se vydáváme zpětně od současného vstupu k počátku (u(T-t) pro t=0 až T je u(T) at u(0)). Zároveň hodnotu vstupu násobíme hodnotou g(t). Pro u(T) je hodnota g(0) a pro u(0) je hodnota g(T) - čas v g(t) běží tedy v opačném směru jako u vstupu (tj. "otočená" impulsní charakteristika v obrázku).

U druhého integrálu procházíme vstupní signál od počátku a uplatňujeme odezvu od tohoto bodu do daného času. Impulsní charakteristika je opět "pozpátku" v čase t=T je g(0) a v čase t=0 je g(T).

Na rozdíl od časových průběhů zpracovávaných v reálném čase, může u zpracování obrazu sbýt konvoluční jádro i v záporných hodnotách vůči bodu, ve kterém počítáme odezvu.