Integrální transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod do integrálních transformací.
2. Jednorozměrná Fourierova transformace.
3. Dvojrozměrná Fourierova transformace.
4. Filtrace ve Fourierovském spektru.

Integrální transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. **Úvod do integrálních transformací.**
2. Jednorozměrná Fourierova transformace.
3. Dvojrozměrná Fourierova transformace.
4. Filtrace ve Fourierovském spektru.

Úvod do integrálních transformací – definice

- Transformace – obecně přeměna vstupního signálu podle předem určených pravidel na jiný signál
- Integrální transformace – reprezentují lineární operátory, bezztrátové (inverzní transformace přímé vede k původnímu signálu, vyjma zaokrouhlování u číslicového signálu/rastr obrazu)
- Umožňují ve frekvenční oblasti snadno odstranit lineární zkreslení, která jsou v prostorové oblasti odstranitelná jen obtížně nebo vůbec (je ale třeba znát parametry lineárního filtru).
- Nevýhodou řešení pomocí integrálních transformací je nutnost převodu signálu do frekvenční oblasti a zpět.
- Výhodou je zjednodušení restaurace signálu a možnost slučování více filtrů do jednoho (konvoluce).
- Režie na přímou a inverzní (zpětnou) transformaci: v případě málo a jednoduchých filtrů se pracuje v prostorové doméně, v případě více filtrů složitějšího tvaru se vyplatí převod do jiné oblasti.

Úvod do integrálních transformací – definice

- Typy integrálních transformací:
  - Fourierova transformace: frekvenční spektrum signálu
  - Laplaceova transformace: obecnější mechanismus
  - Vlnková transformace (wavelet): prostoro-frekvenční oblast
  - a další…

- Integrální transformace je obecně taková transformace, která pro výpočet výstupního signálu používá integrál nad vstupním signálem a jádrem transformace (kernelem)

- Přímá: $F(u) = c \cdot \int f(x)\psi(x,u)dx$

- Zpětná: $\mathrm{f}(x) = C \cdot \int F(u)\psi^{-1}(x,u)du$

- Všimněte si, že kernel ψ je funkce dvou proměnných

- Transformace převádí „složitý“ signál do prostoru jednodušších funkcí tvořících ortonormální bázi.

Integrální transformace

Karel Horák

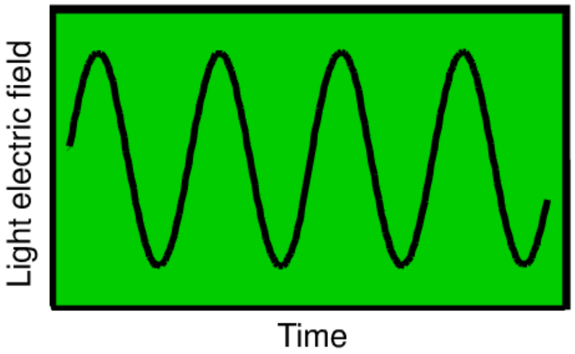
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

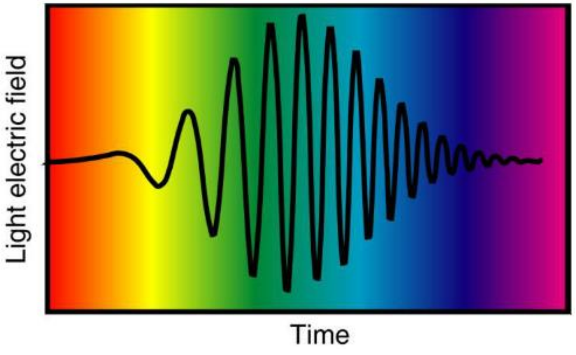
1. Úvod do integrálních transformací.
2. **Jednorozměrná Fourierova transformace.**
3. Dvojrozměrná Fourierova transformace.
4. Filtrace ve Fourierovském spektru.

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Co je Fourierova transformace? (Joseph Fourier, 1768-1830)
- FT je Fourierova kosinová řada pro sudé funkce a sinová řada pro liché.
- Co je Fourierova transformace jinak?
- Přejeme si zjistit, jaké frekvence jsou obsaženy v signálu:



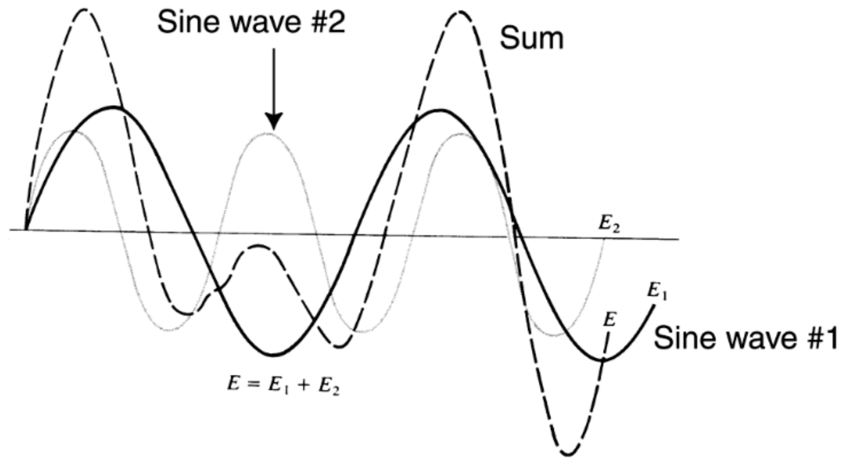
- Tato rovinná vlna obsahuje pouze jednu frekvenci →
  – v čase se nemění frekvence ani amplituda



- Tato světelná vlna obsahuje mnoho různých frekvencí →
  – v čase se mění frekvence (od červené po fialovou) i amplituda

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Předpokládejme součet E dvou sinových signálů E_1 a E_2 podle obrázku:



- Tvrzení 1: E_1 i E_2 jsou harmonické signály (sin/cos) rozdílných frekvencí ($\omega_1 < \omega_2$) i amplitud.
- Tvrzení 2: každý harmonický signál je periodický (obráceně neplatí).

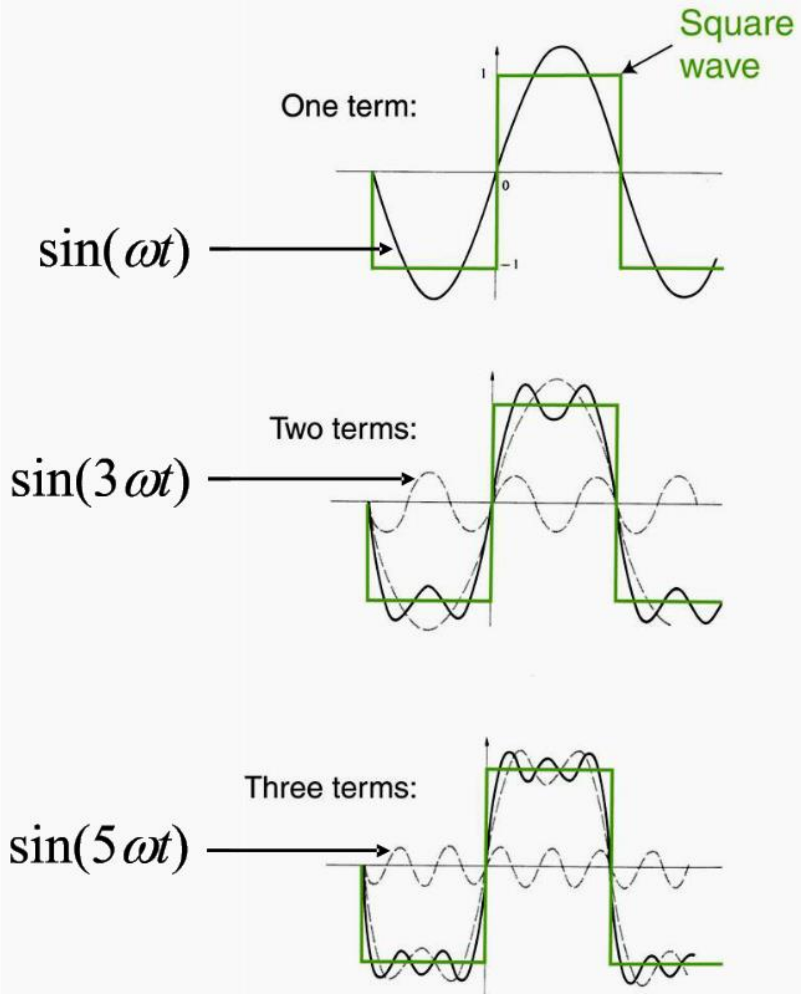
  $\Downarrow$
- Důsledek: výsledný superponovaný signál E je periodický, ale už není harmonický.

- FT pak rozkládá periodický signál na sérii původních harmonických signálů tj. E na E_1 a E_2.

- Počet elementárních harmonických signálů je dán složitostí vstupního signálu ($n=1,\ldots,\infty$).

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Dekompozice složitějších signálů – obdélníkový signál:
  - ideální obdélník má nulové trvání změny -1 → +1 a změny +1 → -1
  - obsahuje vysoké frekvence, ideální průběh dokonce f → ∞



- Superpozicí lichých harmonických fce sin lze aproximovat obdélník.
- První harmonická sin(ωt): nepříliš dobrá aproximace
- Navíc třetí harmonická sin(3ωt): lepší
- Navíc pátá harmonická sin(5ωt): ještě lepší
  $\Downarrow$
- Čím vyšší počet superpozičních signálů, tím lepší aproximace.

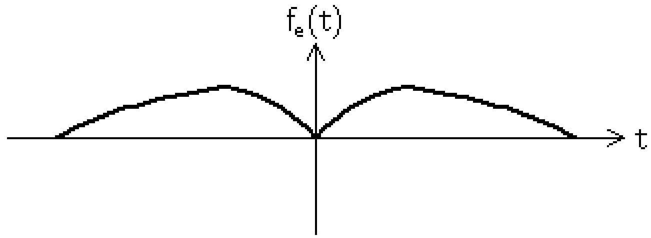
Jednorozměrná Fourierova transformace

- Myšlenka:
  - libovolná funkce je rozložitelná na součet lichých a sudých funkcí

    $\Downarrow$
  - tuto funkci lze vyjádřit jako vážený součet komplexních exponenciál ($e^{i\omega t}$)

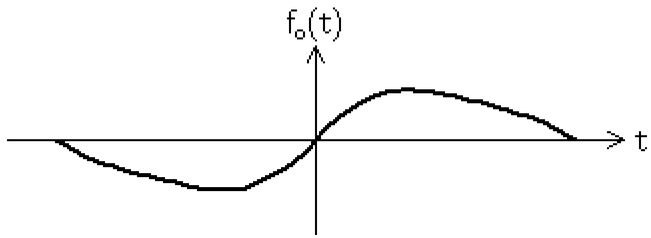
    $\Downarrow$
  - FT = $\int f(t) \cdot e^{-i\omega t}$ kde hodnota signálu f(t) představuje váhu (později)

- Sudá fce: $f_e(t) = f_e(-t)$



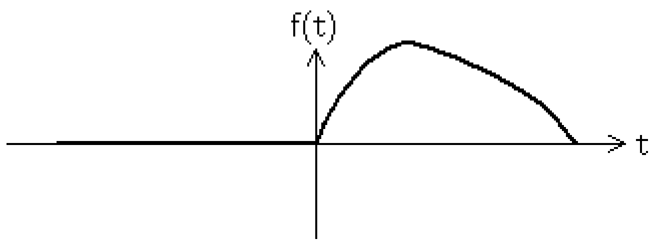
$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

- Lichá fce: $f_o(t) = -f_o(-t)$



$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

- Funkce $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$



recipročně

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Rozklad funkce na sudé a liché části – Fourierova řada:

- Fourierova kosinová řada:
  – protože cos(mt) je sudá fce pro ∀m, můžeme pro sudou část $f_e(t)$ psát:

$$f_e(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cdot \cos(mt)$$

- F_m jsou koeficienty Fourierovy kosinové řady, funkce f(t) je definována na intervalu (-π;+π)

- Tím je sudá část funkce rozložena na harmonické složky, analogicky lze řešit lichou část:
  – protože sin(mt) je lichá fce pro ∀m, můžeme pro lichou část $f_o(t)$ psát:

$$f_o(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F'_m \cdot \sin(mt)$$

- F'_m jsou koeficienty Fourierovy sinové řady

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Násobením obou stran rovnic členem cos(mt) resp. sin(mt) a integrací lze explicitně vyjádřit koeficienty F_m resp. F'_m:

$$F_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot \cos(mt)\, dt \qquad F'_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot sin(mt)\, dt$$

- Obecná funkce f(t) pak může být vyjádřena jako součet sudé a liché části takto:

$$f(t) = f_e(t) \; + \; f_o(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cdot \cos(mt) \; + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} F'_m \cdot \sin(mt)$$

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Finále – definujme funkci F(m), která:
  1) zahrnuje jak kosinové tak sinové koeficienty
  2) rozlišuje mezi složkami zavedením sinové složky jako imaginární (lze i zaměnit)

$$F(m) = F_m - i \cdot F'_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot \cos(mt)\, dt - i \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot sin(mt)\, dt$$

- Pokud nyní definujeme funkci f(t) na intervalu (-∞;+∞) a reálný parametr m symbolicky nahradíme úhlovou frekvenci ω, dostáváme vztah pro Fourierovu transformaci:

$$\boxed{F(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (\cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t))dt = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt}$$

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Fourierova transformace:
  - nejčastější transformace pro lineární zpracování signálu
  - umožňuje analýzu spektrálních složek (Fourierovského spektra)
  - převádí signál z časové domény do frekvenční a zpět (vzájemně jednoznačné)

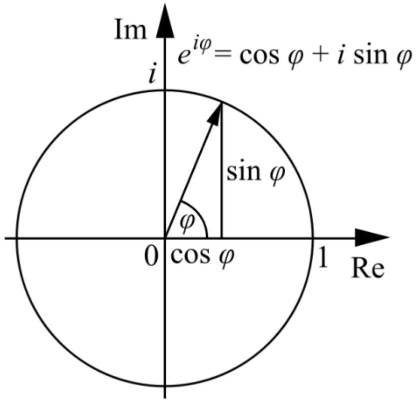
$$f(t) \xrightarrow{FT} F(\omega)$$

- Přímá transformace pro spojitý f(t) a diskrétní f(k) signál:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \qquad F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot e^{-i\Omega k}$$

- Bázi (jádro) transformace tvoří goniometrické funkce sin a cos (Eulerův vzorec):

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i \cdot \sin\omega$$



- Pozn.: Eulerova identita (ω=π):

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Požadavky na existenci FT:
  - signál může mít nespojitosti, musí jich ale mít konečný počet s konečnou amplitudou
  - signál je integrovatelný (Riemannův integrál je konečné číslo)
  - báze je ortonormální

- Pro spojité signály se přímá transformace označuje FT, pro diskrétní DFT:

$$f(t) \xrightarrow{FT} F(\omega) \qquad\qquad f(k) \xrightarrow{DFT} F(\Omega)$$

- Pro ω=0 jde o stejnosměrnou složku signálu:

$$F(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Zpětná transformace pro spojité F(ω) a diskrétní F(Ω) spektrum:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \qquad f(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot e^{i\Omega k}$$

- Pro spojité spektrum se zpětná transformace označuje IFT, pro diskrétní IDFT.

$$F(\omega) \xrightarrow{IFT} f(t) \qquad F(\Omega) \xrightarrow{IDFT} f(k)$$

- Symbolický zápis:

  – spojitá Tx: $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ $\quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$

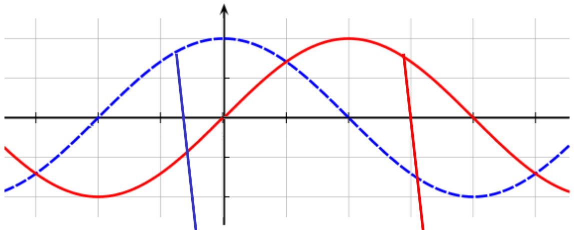
  – diskrétní Tx: $FS(\Omega) = \mathcal{F}\{f(k)\}$ $\quad f(k) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\Omega)\}$

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Vlastnosti Fourierovského spektra – terminologie:
  - spektrum $F(\omega)$ je tvořeno množinou komplexních hodnot: $F(\omega_d)=a+i\cdot b$
  - reálná část: $Re\{F(\omega)\} = a$
  - imaginární část: $Im\{F(\omega)\} = b$
  - absolutní hodnota: $|F(\omega)| = \sqrt{(a^2+b^2)}$
  - fáze: $\arg\{F(\omega)\} = tg^{-1}(b/a)$
  - energie: $E\{F(\omega)\} = |F(\omega)|^2$ (výraz je občas nazýván spektrum - nepřesné)

- Vlastnosti Fourierovského spektra – symetrie:
  - $F(\omega)$ je symetricky sdružené tj. $F(\omega)= F^*(-\omega)$
  - $Re\{F(\omega)\}$ a $|F(\omega)|$ jsou vždy sudé funkce
  - $Im\{F(\omega)\}$ a $\arg\{F(\omega)\}$ jsou vždy liché funkce

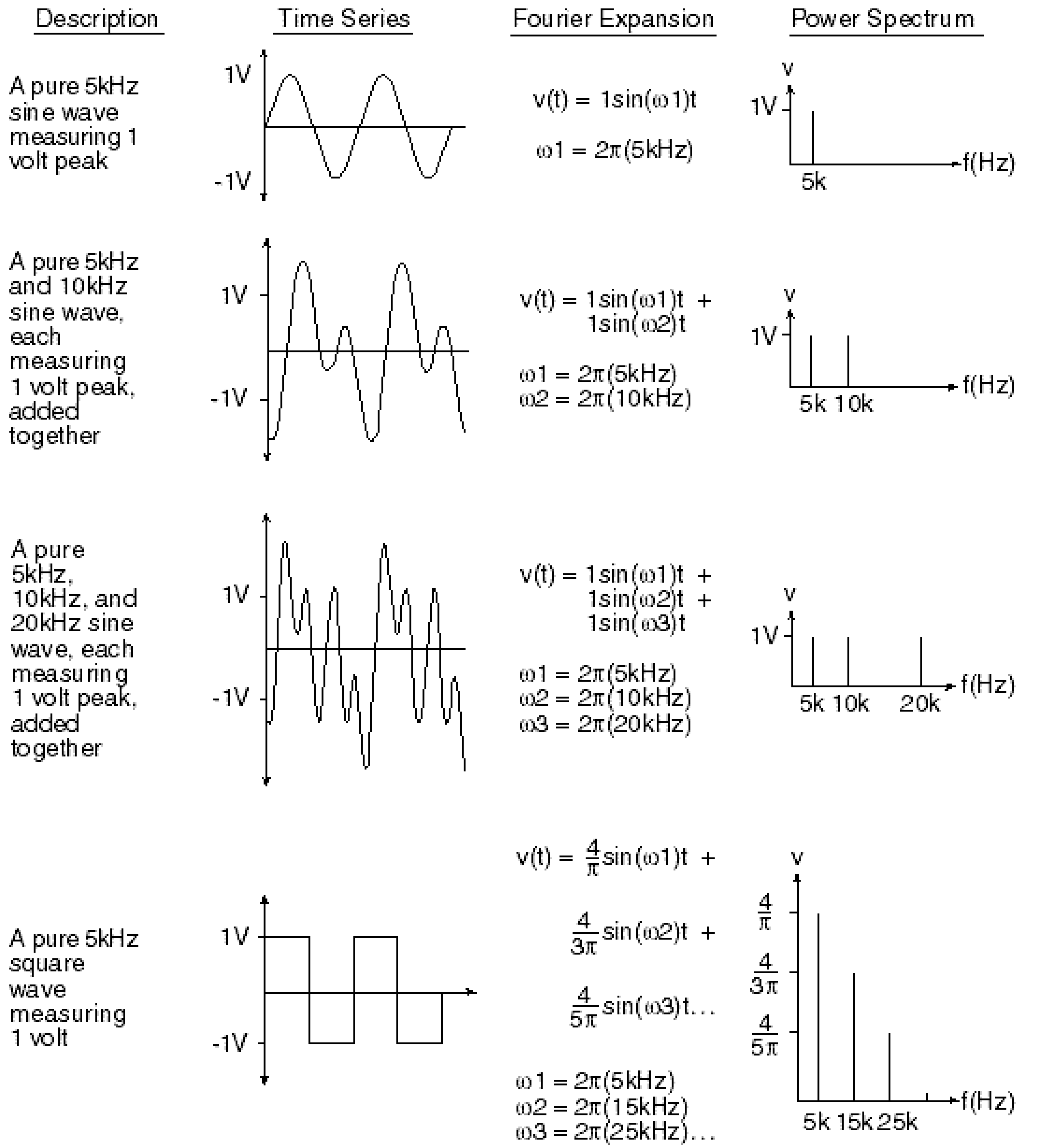
- Intuitivní představa rozkladu:
  - sudé části f(t) se transformují na reálnou část $F(\omega)$
  - liché části f(t) se transformují na imaginární část $F(\omega)$



$$e^{i\omega} = \cos\omega + i \cdot \sin\omega$$

Jednorozměrná Fourierova transformace

- Příklady pro harmonické signály:
  - jedna harmonická 5 kHz
  - dvě harmonické 5 a 10 kHz
  - tři harmonické 5, 10 a 20 kHz
  - obdélník (všechny násobky 5 kHz)

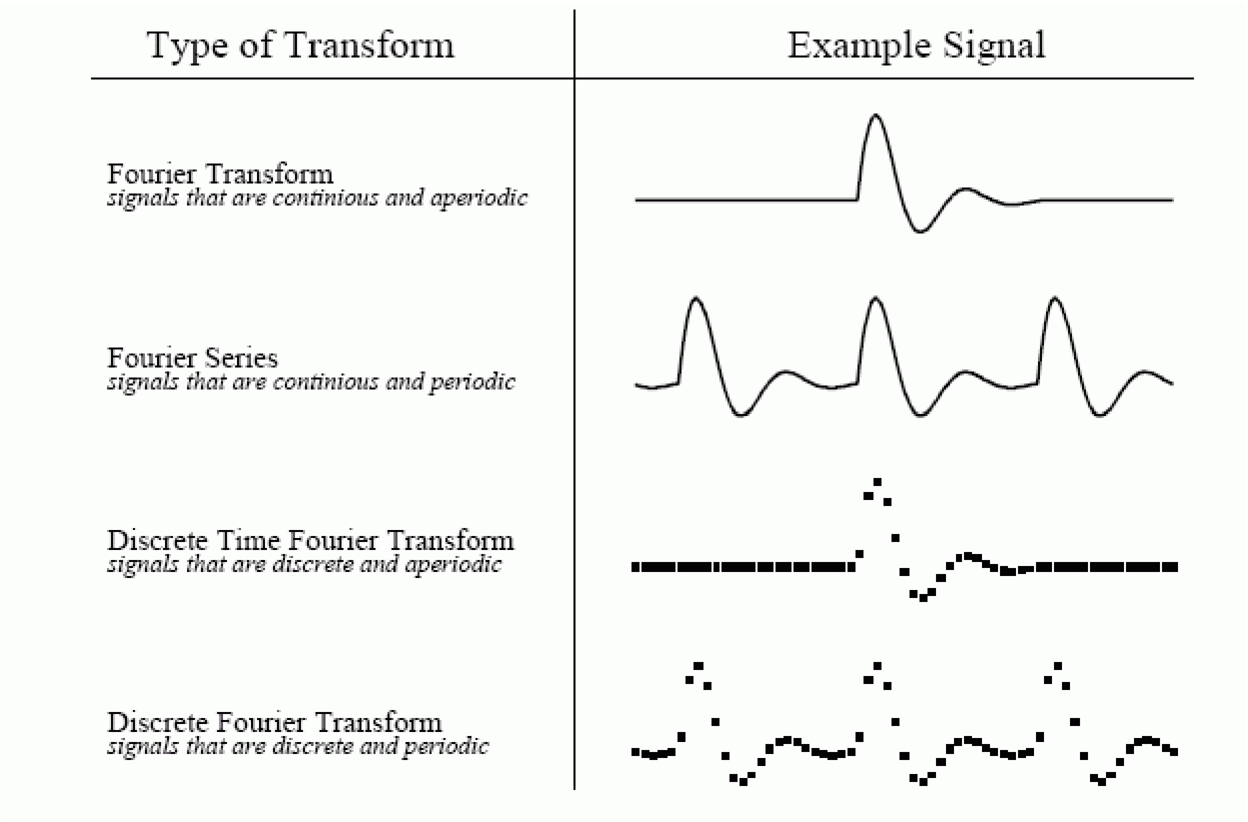


Jednorozměrná Fourierova transformace

- Periodicita signálu vs. periodicita spektra:

- Signál může být mj. periodický nebo aperiodický:
  - periodický: funkční hodnota signálu se opakuje v pravidelných intervalech tj. $f(t)=f(t+k\cdot T_0)$
  - aperiodický: není splněna podmínka periodicity

  pozn.: každý signál má omezenou dobu trvání ⇒ ideálně periodický signál neexistuje



Integrální transformace

Karel Horák

Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

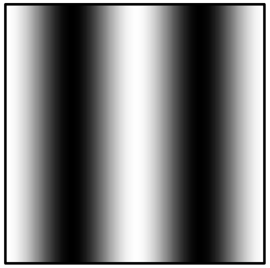
Rozvrh přednášky:

1. Úvod do integrálních transformací.
2. Jednorozměrná Fourierova transformace.
3. **Dvojrozměrná Fourierova transformace.**
4. Filtrace ve Fourierovském spektru.

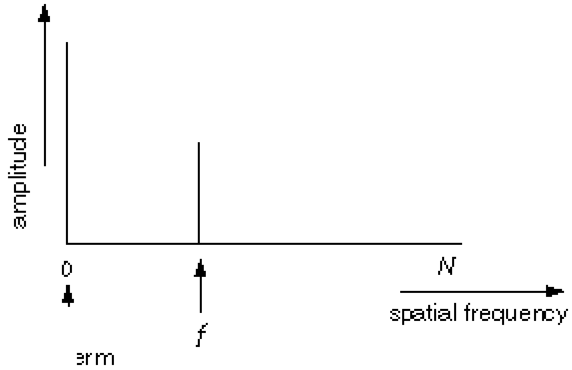
Dvojrozměrná Fourierova transformace

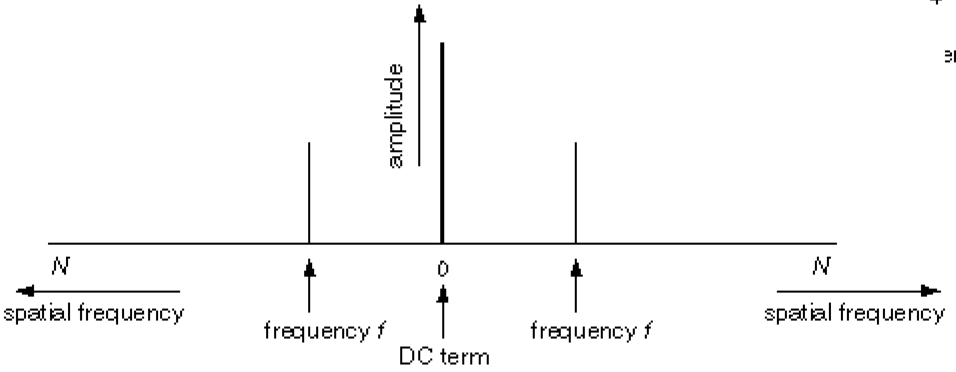
- Rozšíření FT z 1D do 2D:
  1) intuitivně
  2) matematicky

- Intuitivně: mějme obraz po řádcích sinusového průběhu →
  (žádné jiné složky se v obrazu nevyskytují)



- FT jednoho řádku (v tomto případě libovolného):



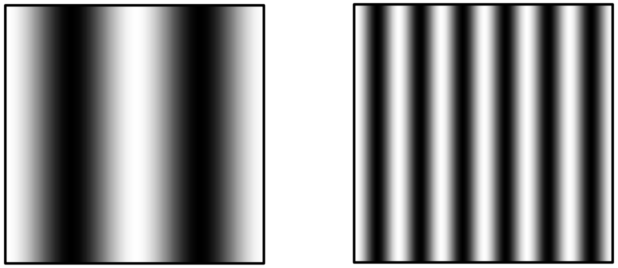


Dvojrozměrná Fourierova transformace

- Signálová doména 1D: f(t) - časový průběh signálu
- Signálová doména 2D: f(x,y) - prostorové souřadnice

- Obrazová doména 1D: F(ω) - úhlová frekvence
- Obrazová doména 2D: F(u,v) – prostorové frekvence

- Prostorová frekvence: vlevo nižší, vpravo vyšší



Integrální transformace

Karel Horák

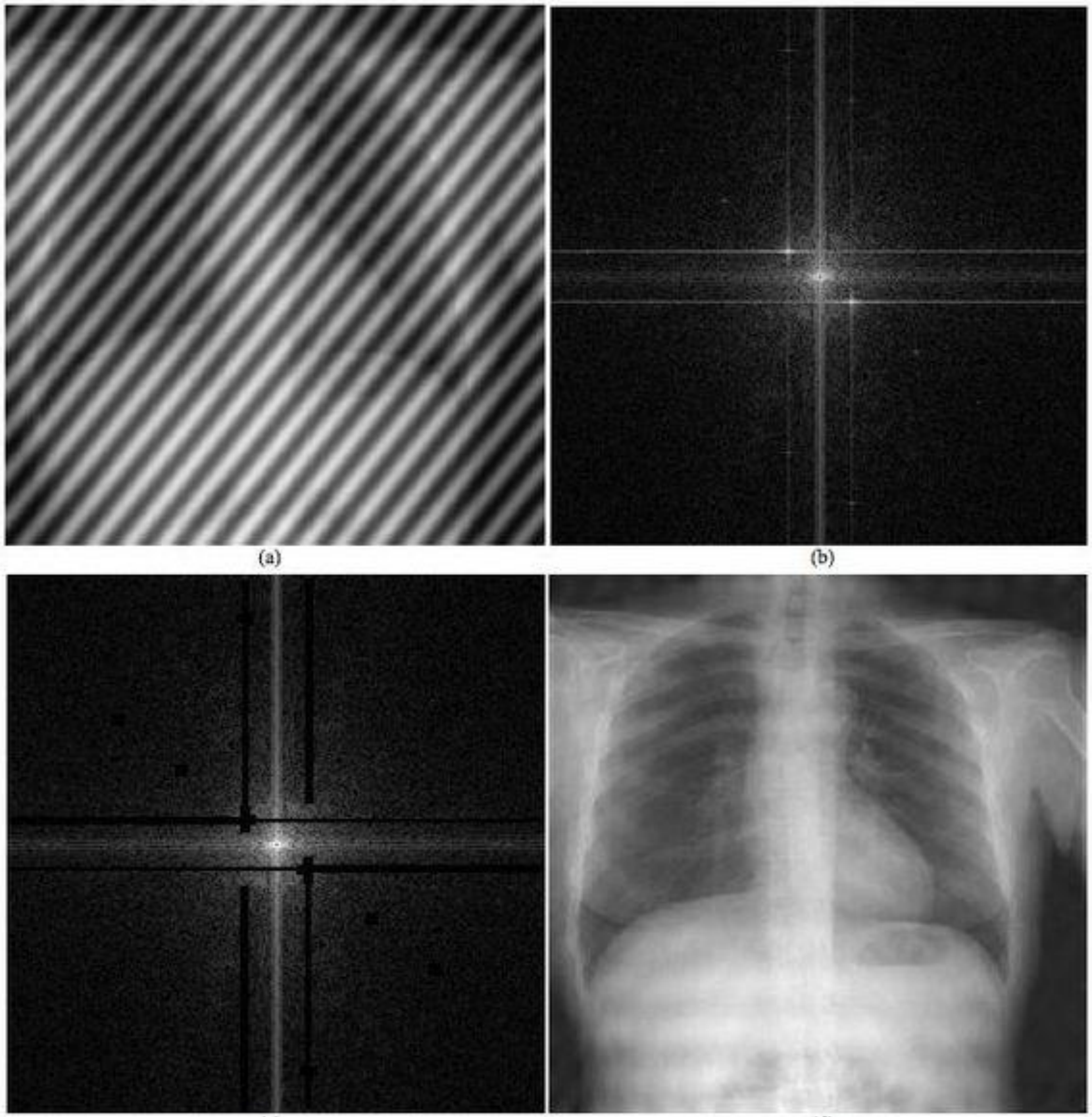
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

Rozvrh přednášky:

1. Úvod do integrálních transformací.
2. Jednorozměrná Fourierova transformace.
3. Dvojrozměrná Fourierova transformace.
4. **Filtrace ve Fourierovském spektru.**

Filtrace ve Fourierovském spektru – definice

- Definice:



(a) (b) (c) (d)